(أولاً) أجب عن السؤال الآتى :

(١) (ا) أوجد : (أولاً) $\int (٣س - ٢)^{٥} \, د س$

(ثانيًا) $\int (حا س + حتا س)^{٢} \, د س$

(ب) أوجد القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للدالة د حيث :

د (س) = ٢ $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ + ٨ فى [٠ ، ٢] .

(ثانيًا) أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

(٢) (ا) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{حا(س - ٤)}{(س - ٤)} & ، \ س > ٤ \\ طا \frac{ط}{١٦} س & ، \ س < ٤ \end{cases}$

فأوجد : نهـــــا د (س) .
س ← ٤

(ب) أثبت أنه يمكن رسم مماسين من النقطة (٠ ، − ٤) للمنحنى ص = $س^{٢}$ ، وأوجد معادلة كل منهما .

(٣) (ا) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ا س^{٢} & ، \ س > ٢ \\ ٤ س - ب & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ، فأوجد قيمة كل من الثابتين ا ، ب

(ب) عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = د (س) كان ميل العمودى عليه يساوى $\frac{-١}{٢ س + ١}$ ، أوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بنقطة الأصل .

(٤) (أ) أوجد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية ونقط الانقلاب (إن وجدت) للدالة : ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٩ س + ٢

(ب) مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين مساحته (م) سم^{٢} ، فإذا كان :

$\frac{د م}{د ن}$ = ٣٢ سم^{٢}/ ث فى اللحظة التى كان طول أى من الساقين ٨ سم .

أوجد عند هذه اللحظة معدل التغير الزمنى لمحيط المثلث (ع) .

(٥) (أ) إذا كانت : ص^{٢} = س ، فأثبت أن : س $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ص ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} = ٠

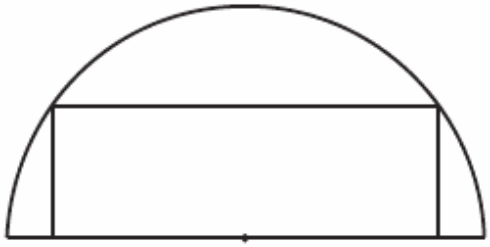
(ب) فى الشكل المقابل :

مستطيل مرسوم داخل نصف سطح

دائرة طول نصف قطرها ٤ سم .

أوجد : بعدى هذا المستطيل عندما

تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن .



الاجابة

(١) [ا] (أولًا) $\int (٣س - ٢)^{٥} \, د س$

$= \frac{١}{١٨} (٣س - ٢)^{٦} + ث$

(ثانيًا) $\int (حا س + حتا س)^{٢}$

$= ١ + ٢ حا س حتا س$

$= ١ + حا ٢ س$

$\therefore \int (حا س + حتا س)^{٢} \, د س$

$= \int (١ + حا ٢ س) \, د س$

$= س - \frac{١}{٢} حتا ٢ س + ث$

[ب] $\because د(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٨$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} - ٦س$

بوضع $د'(س) = ٠$

$\therefore ٦س(س - ١) = ٠$

$\therefore س = ٠$ أو $س = ١$

$د(٠) = ٨$ ، $د(١) = ٧$ ، $د(٢) = ١٢$

∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٢

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ٧

(٢) [أ] د (٤)$^{-}$ = نهـــا$_{س \leftarrow ٤^{-}}$ $\frac{\text{حا}(س - ٤)}{(س - ٤)}$ = ١

د (٤)$^{+}$ = نهـــا$_{س \leftarrow ٤^{+}}$ $\frac{ط}{١٦}$ س = ط ٤٥° = ١

∵ د (٤$^{-}$) = د (٤)$^{+}$

∴ نهـــا$_{س \leftarrow ٤}$ د (س) = ١

[ب] بفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب)

∴ النقطة (أ ، ب) تحقق معادلة المنحنى

∴ ب = أ^{٢} ..... (١)

ميل المماس = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

∴ ميل المماس = $\frac{ب + ٤}{أ - ٠} = \frac{ب + ٤}{أ}$ .... (٢)

∵ ص = س^{٢} ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س

∵ نقطة التماس هى (أ ، ب)

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ أ ..... (٣)

من (٢) ، (٣)

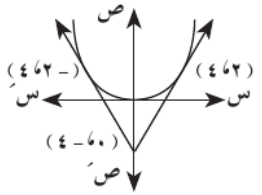
∴ $\frac{ب + ٤}{أ}$ = ٢ أ ∴ ب = ٢ أ^{٢} − ٤ ... (٤)

بحل المعادلتين (١) ، (٤)

∴ ٢ أ^{٢} − ٤ = أ^{٢} ∴ أ^{٢} = ٤

∴ أ = ± ٢

∴ نقط التماس هى : (٢ ، ٤) ، (−٢ ، ٤)



* عند س = ٢ ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس المار بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ ص − ٤ = ٤ (س − ٢)

∴ ٤ س − ص − ٤ = ٠

عندما س = − ٢ ∴ ميل المماس = − ٤

∴ معادلة المماس المار بالنقطة (− ٢ ، ٤)

∴ ص − ٤ = − ٤ (س + ٢)

∴ ٤ س + ص + ٤ = ٠

③ [أ] ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د (٢)$^{-}$ = د (٢)$^{+}$

∴ ٤ أ = ٨ − ب ..... ①

$$د'(س) = \begin{cases} ٢ أ س & ، س < ٢ \\ ٤ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

∵ د′ (٢)$^{-}$ = د′ (٢)$^{+}$

∴ ٤ أ = ٤ ∴ $\boxed{أ = ٢}$

من ① ٤ = ٨ − ب ∴ $\boxed{ب = ٤}$

[ب] ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٢ س + ١}$

∴ ميل المماس = ٢ س + ١

∵ ص = ∫ (٢ س + ١) د س

∴ ص = س^{٢} + س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) ∴ $\boxed{ث = ٠}$

∴ معادلة المنحنى هى : ص = س^{٢} + س

(٤) [أ] ∵ $ص = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٩ س + ٢$

$\therefore ص' = س^{٢} - ٩$

بوضع $ص' = ٠$

$\therefore س = ٣$ أو $س = -٣$

$د(٣) = -١٦$ و $د(-٣) = ٢٠$

$ص'' = ٢ س$

$د''(٣) = ٦ > ٠$

∴ توجد قيمة صغرى محلية عند النقطة $(٣ ، -١٦)$

$د''(-٣) = -٦ < ٠$

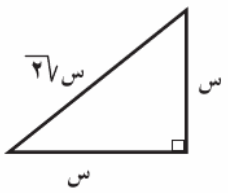
∴ توجد قيمة عظمى محلية عند النقطة $(-٣ ، ٢٠)$

لإيجاد نقط الانقلاب نضع $د''(س) = ٠$

$\therefore س = ٠$

∴ توجد نقطة انقلاب عند النقطة $(٠ ، ٢)$

[ب]



نفرض أن : طول كل من ساقى المثلث = س

∴ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} س^{٢}$

∵ $م = \frac{١}{٢} س^{٢}$

∴ $\frac{ك م}{ك ن} = س \frac{ك س}{ك ن}$ ..... (١)

∵ $\frac{ك م}{ك ن} = ٣٢$ سم^{٢}/ث

عندما س = ٨ سم

من (١) ∵ $٣٢ = ٨ \times \frac{ك س}{ك ن}$

∴ $\frac{ك س}{ك ن} = ٤$ سم/ث

∵ $ع = ٢ س + س\sqrt{٢}$

∴ $\frac{ك ع}{ك ن} = ٢ \frac{ك س}{ك ن} + \sqrt{٢} \times \frac{ك س}{ك ن}$

∴ $\frac{ك ع}{ك ن} = ٢ \times ٤ + ٤\sqrt{٢}$

$= ٤ (٢ + \sqrt{٢})$ سم/ث

⑤ [أ] ∵ ص^{٢} = س ... ①

∴ ٢ ص $\frac{د ص}{د س}$ = ١

∴ ٢ ص $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢ ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} = ٠

بضرب طرفى المعادلة × ص

∴ ٢ ص^{٢} $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢ ص ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} = ٠ .. ②

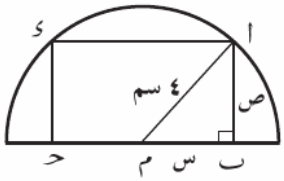
من ① ، ②

∴ ٢ س $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢ ص ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} = ٠

(بقسمة طرفى المعادلة على ٢)

∴ س $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢ ص ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} = ٠

[ب]



بفرض أن بعدى المستطيل هما ٢ س ، ص

مساحة المستطيل = ٢ س ص .... ①

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

∴ ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ .... ②

من ① ، ②

∴ م = ٢ س $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$

∵ م َ = $\frac{٢ س \times -٢ س}{٢\sqrt{١٦ - س^{٢}}}$ + ٢ $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$

بوضع م َ = ٠

∴ $\frac{- س^{٢}}{\sqrt{١٦ - س^{٢}}}$ + $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ = ٠

∴ س^{٢} = ١٦ – س^{٢}

∴ ٢ س^{٢} = ١٦ ∴ س = ٢ $\sqrt{٢}$ سم

∴ مساحة المستطيل تكون أكبر ما يمكن إذا كانت س = ٢ $\sqrt{٢}$ سم

من ① ص = ٢ $\sqrt{٢}$ سم

∴ بعدا المستطيل هما :

٤ $\sqrt{٢}$ سم ، ٢ $\sqrt{٢}$ سم